Grundlagen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Seien A, B, C Mengen und a, b, c logische Aussagen.

a) Bestimmen Sie die Potenzmenge der folgenden Mengen:

$\{\emptyset\}$, $\emptyset$, $\{4, \{4, 6\}, 6\}$

b) Schreiben Sie die beschriebene Menge mathematisch sauber auf:

Menge aller natürlichen Zahlen, die beim Teilen durch 3 Rest 1 haben

c) Zeigen Sie: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

d) Zeigen Sie, dass $((a \vee \neg(b \wedge a)) \wedge (c \vee (d \vee c)))$ äquivalent ist zu $(c \vee d)$

e) Gilt $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$?

f) Ist $\neg(a \vee ((a \vee b) \wedge b))$ äquivalent zu $\neg a \wedge \neg b$?

g) Vereinfachen Sie den folgenden Term: $(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c)$.

2. Aufgabe:

Seien $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Abbildungen, sodass für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\alpha((x, y)) = (-2 \cdot x + y, y^2), \qquad \beta(z) = -z^2.$$

Außerdem sei mit $z \in \mathbb{Z}$ die Funktionenschar $\phi_z : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, a \mapsto a + z$ gegeben.

a) Schreiben Sie die vollständige Urbildmenge von $(0, 4)$ und $(1, 0)$ unter α hin.

b) Ist α injektiv? Ist α surjektiv?

c) Ist β injektiv? Ist β surjektiv?

d) Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{Z}$ die Abbildung ϕ_z bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrfunktion?

e) Finden Sie eine Abbildung, die von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ abbildet und nicht surjektiv ist.

3. Aufgabe:

a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ gilt: $m^3 - m$ ist durch 3 teilbar.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{l=1}^{n} l \cdot (l + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

c) Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $n^2 > 3 \cdot n + 1$? Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

4. Aufgabe:

a) Seien M eine Menge und R eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ definiert wie folgt:
$R := \{(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \mid$ Es existiert eine injektive Abbildung von A_1 nach $A_2\}$. Zeigen Sie, dass die Relation reflexiv und transitiv ist. Ist R eine Äquivalenzrelation?

b) Sei $T := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b$ ist durch 5 teilbar$\}$. Zeigen Sie, dass T eine Äquivalenzrelation ist. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? Bestimmen Sie jeweils 2 davon. Wie sieht die Quotientenmenge von $\mathbb{Z}$ bezüglich T aus?

c) Sei $A := \{a, b, c, d, e, f\}$ eine Menge. Geben Sie eine Relation auf A an.

d) Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele unterschiedliche Relationen existieren auf A?

Algebraische Strukturen

1. Aufgabe:

Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1 und $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Sei $g \in G$.
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

a) $(g^{-1})^{-1} = g$.

b) Falls G nur 3 Elemente hat, ist G kommutativ.

c) R hat genau dann mindestens 2 Elemente, wenn $1 \neq 0$ gilt.

d) Wir definieren für ein festes $a \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $\phi : R \to R$ mit $\phi(x) := ax$ für $x \in R$. Falls R keine nicht-trivialen Nullteiler enthält, dann ist ϕ injektiv.

2. Aufgabe:

a) Sei $E := \{z = a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R},\ |z| := \sqrt{a^2 + b^2} = 1\}$. Zeige, dass $(E, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist bezüglich der Standardmultiplikation in $\mathbb{C}$.

b) Zeige, dass $F := \{p \in \mathbb{Q}[t] \mid \exists\ \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{Q} : p = \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4\}$ eine kommutative Gruppe bezüglich der Polynomaddition bildet.

3. Aufgabe:

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sei $g \in G$ fest. Wir definieren eine Abbildung $\phi : G \to G$ wie folgt: Für alle $y \in G$ sei $\phi(y) = g^{-1} \cdot y \cdot g$. Zeige, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus von G in sich selbst ist.
Bewirkt $\alpha : G \to G$ mit $\alpha(y) = g \cdot y \cdot g^{-1}$ für alle $y \in G$ auch einen Gruppenhomomorphismus? Welche Eigenschaft muss für die Gruppe gelten, damit ϕ für jedes $g \in G$ stets die identische Abbildung auf G ist?

Bonus: Zeige, dass ϕ bijektiv (also ein Isomorphismus) ist.

4. Aufgabe:

Gib jeweils ein Beispiel an für die folgenden algebraischen Strukturen:

a) Ein Körper mit genau 5 Elementen.

b) Ein Ring mit 1, der nicht kommutativ ist.

c) Ein kommutativer Ring ohne 1, der mindestens 2 Elemente besitzt.

Matrizen und Determinanten

1. Aufgabe:

Berechne alle möglichen Produkte und Summen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Aufgabe:

Berechne den Rang von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Gebe A^{-1} für alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die die inverse Matrix existiert.

3. Aufgabe:

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe!

1. Für $A,\ B \in \mathbb{R}^{n,m}$ ist $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, dann ist $\det(A) \neq 0$.

3. Für $A,\ B \in \mathbb{R}^{n,m}$ ist $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

4. Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$.

5. Für $A \in \mathbb{R}^{6,4}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- **a)** A hat vollen Rang
- **b)** $rang(A) = 6$

6. Für $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ist $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^\top)$.

4. Aufgabe:

a) Berechne die Determinante folgender Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

b) Berechne die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Aufgabe:

Zeige, dass die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n} : A \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$ eine Gruppe mit der Matrizenmultiplikation bildet.

Lineare Gleichungssysteme

1. Aufgabe:

Stellen Sie folgende zwei Matrizen als Multiplikation von Elementarmatrizen dar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3} \text{ mit } a \in \mathbb{Q}.$$

2. Aufgabe:

Seien gegeben

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Treppennormalform von $B, [B, c_1]$ und $[B, c_2]$.

b) Geben Sie die zwei Lösungsmengen $\mathcal{L}(B, c_i)$ von $Bx = c_i, i \in \{1, 2\}$, an.

3. Aufgabe:

Seien gegeben

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & 16 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, -1 \end{bmatrix}^\top$ eine Lösung von $Ax = b$.

c) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ nur mit Hilfe von a) und b) an.

4. Aufgabe:

Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & a & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & b & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{3,3},$$

$$\text{und} \qquad C = \begin{bmatrix} t & t+1 & 2 \\ t^2 + 2t & t^2 + 3t + 2 & p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[t]^{3,2}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{R}[t]$.

5. Aufgabe:

Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an.

- ☐ Ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A \in K^{n,m}$, $n > m$, ist immer lösbar.
- ☐ Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n,m}, b \in K^n$, $n > m$, kann keine eindeutige Lösung haben.
- ☐ Jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n,m}, b \in K^n$, das mindestens 2 Lösungen hat, hat auch unendlich viele Lösungen.
- ☐ Wenn ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n,m}, b \in K^n$, $n \geq m$, genau eine Lösung hat, muss $\operatorname{rang}(A) = m$ gelten.
- ☐ Sei die Treppennormalform von $[A|b] \in \mathbb{R}^{3,6}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

  Dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmenge

$$\mathcal{L}(A,b) = \left\{ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_4, x_3 = 3 - x_4, x_5 = 0 \right\}$$